Généricité, comportement multifractal, et applications à la divergence des séries de Fourier

Yanick Heurteaux

Un célèbre théorème de Carleson (1966) affirme que la série de Fourier d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p > 1$, converge presque partout. Cependant, il peut y avoir des points de divergence, même lorsque f est continue (du Bois-Reymond, 1872). Lorsque $f \in L^1(\mathbb{T})$, le comportement peut être radicalement différent puisque la série de Fourier peut diverger partout (Kolmogorov, 1926). Une question imprécise mais naturelle peut alors être posée :

Quel est le comportement typique de la série de Fourier
d'une fonction de L^p, d'une fonction de L^1, ou d'une fonction continue ?

Dans une série de travaux en collaboration avec Frédéric Bayart, nous répondons à cette question en décrivant précisément le comportement asymptotique de la série de Fourier d'une fonction générique de L^p, $p \geq 1$, ou d'une fonction continue générique. Nous pouvons calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points ou la série de Fourier diverge à une vitesse donnée et mettons en valeur un comportement multifractal.

A travers ce cours, nous reviendrons sur la notion de dimension de Hausdorff et de comportement multifractal, nous évoquerons les notions de généricité au sens de Baire ou au sens de la prévalence, pour enfin parler de la divergence des séries de Fourier.

Genericity, multifractal behaviour, and applications to the divergence of Fourier series

Yanick Heurteaux

A famous theorem of Carleson (1966) says that the Fourier series of a function $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p > 1$, is almost surely convergent. Nevertheless, the series may diverge at some point, even if f is continuous (du Bois-Reymond, 1872). When $f \in L^1(\mathbb{T})$, the behaviour can be very different and the Fourier series can diverge everywhere (Kolmogorov, 1926). A natural but imprecise question is then :

What is the typical behaviour of the Fourier series
of a L^p function, a L^1 function, or a continuous function ?

In a series of papers written with Frédéric Bayart, we answer this question and we specify the asymptotic behaviour of the Fourier series of a generic L^p function, $p \geq 1$, or of a generic continuous function. We are able to compute the Hausdorff dimension of the set of points where the Fourier series diverges with a given speed and we highlight a multifractal behaviour.

In this course, we will develop the notion of Hausdorff dimension and of multifractal behaviour. We will define the notions of genericity in the sense of the Baire category theorem or in the sense of prevalence. Finally, we will explain our results on the divergence of Fourier series.