Opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz

En collaboration avec

Pascal Lefèvre
Hervé Queffélec
Luis Rodríguez-Piazza

Journées du GDR 2753
Analyse Fonctionnelle et Harmonique et Applications

Lille

14 septembre 2006

Opérateurs de composition

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\} \qquad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$

$\mathscr{E}$ espace de fonctions holomorphes $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$
$\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique telle que $f \circ \phi \in \mathscr{E}$ pour toute $f \in \mathscr{E}$.
Opérateur de composition $C_\phi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ de *symbole* ϕ :

$$f \longmapsto f \circ \phi$$

But : caractériser les propriétés de l'opérateur C_ϕ en termes de propriétés de la fonction ϕ.

Espaces classiques : espaces de Hardy H^p ($1 \le p \le \infty$; modification usuelle pour $p = \infty$) :

$$\|f\|_p^p = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{it})|^p \, dt < +\infty$$

Valeurs au bord :
$f^*(t) = \lim_{r\to 1} f(r\mathrm{e}^{it})$ pour presque tout t
$f^* \in L^p(0, 2\pi)$ et $\|f^*\|_p = \|f\|_p$.

On notera souvent f au lieu de f^*.

Principe de subordination de Littlewood :
Si $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *et* $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *sont analytiques et* $\phi(0) = 0$*, alors, pour* $0 < p \leq \infty$ *et pour tout* $r < 1$ *:*

$$\int_0^{2\pi} |f[\phi(r\mathrm{e}^{it})]|^p \, dt \leq \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{it})|^p \, dt$$

Conséquence : *Tout opérateur de composition* $C_\phi\colon H^p \to H^p$ *est continu.*
C'est une contraction si $\phi(0) = 0$*.*

Shapiro et Taylor (1973) :
1) $C_\phi\colon H^2 \to H^2$ est Hilbert-Schmidt ssi :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - |\phi^*(t)|} \, dt < +\infty.$$

2) Il existe des $C_\phi\colon H^2 \to H^2$ qui sont compacts mais pas Hilbert-Schmidt.
3) Si $C_\phi\colon H^p \to H^p$ est compact pour un $p < \infty$, il est compact pour tous les $p < \infty$.

Remarque. Pour $p = \infty$, $C_\phi\colon H^\infty \to H^\infty$ est compact ssi $\|\phi\|_\infty < 1$.
P. Lefèvre : $C_\phi\colon H^\infty \to H^\infty$ est faiblement compact ssi $\|\phi\|_\infty < 1$.

Condition nécessaire et suffisante de compacité pour $C_\phi\colon H^2 \to H^2$: les valeurs au bord ne suffisent pas ; il faut tenir compte des valeurs de ϕ dans $\mathbb{D}$.

Théorème [Shapiro (1987)] $C_\phi\colon H^2 \to H^2$ *est compact ssi*

$$N_\phi(w) = o\,(1 - |w|)\,, \quad |w| \to 1.$$

où N_ϕ est la fonction de comptage de Nevanlinna :

$$N_\phi(w) = \begin{cases} \sum\limits_{\phi(z)=w} \log \frac{1}{|z|} & w \neq \phi(0) \text{ et } w \in \phi(\mathbb{D}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème [McCluer (1985)] $C_\phi\colon H^2 \to H^2$ *est compact ssi* m_ϕ *est une* **mesure de Carleson** *"évanescente".*

m_ϕ est l'image par ϕ^* de la mesure de Lebesgue (normalisée) m sur $\mathbb{T}$.

Dans cet expoé :

$$\boxed{\text{Voir ce qui se passe ``entre'' les } H^p \text{ pour } p < \infty \text{ et } H^\infty.}$$

On regardera le cas des *espaces de Hardy-Orlicz* H^Ψ.

Fonctions d'Orlicz

$$\Psi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$$

croissante, convexe, et $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\infty) = \infty$. De plus: Ψ continue 0, strictement convexe (donc strictement croissante), et

$$\frac{\Psi(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

$\Psi(x) = ax$ exclu.

Espaces d'Orlicz

<u>Espace L^Ψ</u>: fonctions mesurables $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$:

$$\exists A > 0 \quad \int_{\mathbb{T}} \Psi(|f|/A) < +\infty.$$

$$\|f\|_\Psi = \inf\{A > 0\,;\ \int_{\mathbb{T}} \Psi(|f|/A) \leq 1\}.$$

Pour $\Psi(x) = x^p$, $L^\Psi = L^p$ et $\|\ \|_\Psi = \|\ \|_p$.
L^1 exclu et $L^\Psi \subseteq L^1$ (condition supplémentaire sur Ψ).

Espace de Morse-Transue M^Ψ :
fonctions mesurables $f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{C}$ t.q. :

$$\forall A>0 \quad \int_{\mathbb{T}} \Psi(|f|/A) < +\infty;$$

c'est aussi l'adhérence de L^∞ dans L^Ψ.

Condition Δ_2 (condition de modération)

$$\Psi(2x)\leq C\,\Psi(x)\,, \qquad x\geq x_0$$

Exemples : x^p, $1<p<\infty$;
$x^p\log(x+1)$, $1\leq p<\infty$.

$$\Psi\in\Delta_2 \quad\Longrightarrow\quad L^\Psi = M^\Psi$$

Fonction conjuguée :

$$\Psi^*(x)=\sup_{y\geq 0}\Big(xy-\Psi(y)\Big)$$

$$\Psi^*\in\Delta_2 \quad\Longrightarrow\quad L^\Psi=(M^\Psi)^{**}$$

$$\Psi \quad \text{et} \quad \Psi^*\in\Delta_2 \quad\Longleftrightarrow\quad L^\Psi \quad \text{réflexif}$$

Dans toute la suite : Ψ^* vérifie Δ_2.

Conditions de croissance

- $\boxed{\Psi \in \Delta^0}$: il existe $\beta > 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Psi(\beta x)}{\Psi(x)} = +\infty$$

Exemples:

$$\boxed{\Psi(x) = \exp\Big[\log(x+2)\log\log(x+2)\Big] - 2^{\log\log 2}}$$

$$\boxed{\Psi(x) = \exp\Big[\Big(\log(x+1)^{3/2}\Big)\Big] - 1}$$

- $\boxed{\Psi \in \Delta^1}$ (usuellement Δ_3) : il existe $\beta > 1$:

$$x\Psi(x) \leq \Psi(\beta x)\,, \qquad x \text{ grand}$$

Implique :
$\Psi(x) \geq \exp\Big(\alpha\,(\log x)^2\Big)$ $(\alpha > 0)$, x grand
Exemple :

$$\boxed{\Psi(x) = \mathrm{e}^{(\log(x+1))^2} - 1}$$

• $\boxed{\Psi \in \Delta^2}$: il existe $\beta > 1$:

$$\Psi(x)^2 \leq \Psi(\beta x)\,, \qquad x \text{ grand}$$

Implique : $\Psi(x) \geq \exp(x^\alpha)$ ($\alpha > 1$, x grand)

Exemple :

$$\boxed{\Psi(x) = \Psi_2(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1}$$

On a :

$$\Delta^2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta^1 \quad \Longrightarrow \quad \Delta^0$$

Espaces de Hardy-Orlicz

$f \in H^\Psi$ si $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytique et

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_\Psi < +\infty$$

avec $f_r(t) = f(r\mathrm{e}^{it})$.

On a $H^\Psi \subseteq H^1$ et pour $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytique $f \in H^\Psi$ ssi f a des valeurs au bord $f^* \in L^\Psi(0, 2\pi)$ avec $\widehat{f^*}(n) = 0$ pour $n < 0$.

La norme est $\|f\|_\Psi = \|f^*\|_{L^\Psi}$.

HM^Ψ : les fonctions de H^Ψ dont les valeurs au bord sont dans M^Ψ.

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'évaluation

$$\delta_z \colon H^\Psi \to \mathbb{C} \quad f \mapsto f(z)$$

est continue et

$$\boxed{\|\delta_z\|_{(H^\Psi)^*} \approx \Psi^{-1}\left(\frac{1}{1 - |z|}\right) \cdot}$$

Opérateurs de composition

Continuité

Pour toute fonction analytique $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, l'opérateur $C_\phi\colon H^\Psi \to H^\Psi$ est continu : résulte du Principe de subordination de Littlewood, et de $\Psi \circ |f|$ sous-harmonique (Ψ convexe croissante).

Compacité

Critère. *$C_\phi\colon H^\Psi \to H^\Psi$ est compact ssi $\forall f_n \in H^\Psi$ t.q. $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{D}$, on a $\|C_\phi(f_n)\|_\Psi \longrightarrow 0$.*

Remarque. $T\colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ est Hilbert-Schmidt ssi T est *borné pour l'ordre*.

Si X Banach et Y treillis de Banach, $T\colon X \to Y$ est borné pour l'ordre s'il existe $y \in Y$ positif tel que $|Tx| \leq y$ pour tout $x \in B_X$.

Par le Théorème de convergence dominée : si $C_\phi\colon H^\Psi \to H^\Psi$ est borné pour l'ordre et si $C_\phi(H^\Psi) \subseteq HM^\Psi$, alors C_ϕ est compact.

Proposition 1 *$C_\phi \colon H^\Psi \to H^\Psi$ est borné pour l'ordre et $C_\phi(H^\Psi) \subseteq HM^\Psi$ ssi*

$$\Psi^{-1}\Big(\frac{1}{1-|\phi^*|}\Big) \in M^\Psi(\mathbb{T}),$$

càd :

$$\boxed{\chi_A\Big(\frac{1}{1-|\phi^*|}\Big) \in L^1(\mathbb{T})\,, \quad \forall A > 0}$$

où :

$$\boxed{\chi_A(x) = \Psi\Big(A\Psi^{-1}(x)\Big)}\,.$$

Remarque. Pour $\Psi(x) = x^p$, $\chi_A(x) = A^p x$; mais pour $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1$, on a

$$\chi_A(x) = (x+1)^{A^2} - 1.$$

Théoreme 2 *1) Si $C_\phi\colon H^\Psi \to H^\Psi$ est borné pour l'ordre et $C_\phi(H^\Psi) \subseteq HM^\Psi$, alors :*

$$\boxed{\forall A > 0, \quad m(1 - |\phi| < \lambda) = o\Big(\frac{1}{\chi_A(1/\lambda)}\Big), \ \lambda \to 0}\,.$$

2) Si $\Psi \in \Delta^1$, la réciproque a lieu.

m : mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

Preuve liée à la notion d'espace "L^Ψ-faible" $L^{\Psi,\infty}$ et au fait que si $\Psi \in \Delta^1$, alors $L^\Psi = L^{\Psi,\infty}$.

Une application :

Théoreme 3 *Si $\Psi \in \Delta^2$, il existe des $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tels que $C_\phi\colon H^\Psi \to H^\Psi$ soit compact, mais p-sommant pour aucun $p \geq 1$.*

Rappel : Sur un espace de Hilbert (comme H^2), p-sommant équivaut à Hilbert-Schmidt.

La condition Δ^2 sert dans la deuxième partie. La condition du Théorème 2 ne fait intervenir que le module des valeurs aux bord ; on peut donc construire ϕ comme fonction extérieure.

Compacité faible

Critère. Soit $X \subseteq M^\Psi$. Alors, si $\Psi \in \Delta^0$, on a $T\colon X \to Y$ (Y Banach) faiblement compact ssi pour un (et alors pour tout) p ($1 \leq p < \infty$), on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon > 0,$$
$$\|T(f)\| \leq C_\varepsilon \|f\|_p + \varepsilon\, \|f\|_\Psi, \quad \forall f \in X.$$

(voir l'exposé de Pascal Lefèvre).

Théoreme 4 *Sous l'hypothèse* $\Psi \in \Delta^0$, *alors la faible compacité de* $C_\phi\colon H^\Psi \to H^\Psi$ *implique que :*

$$\boxed{\sup_{a \in \mathbb{T}} \|C_\phi(u_{a,r})\|_\Psi = o\left(\frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right), \quad r \to 1}.$$

où, pour $|a| = 1$ et $0 \leq r < 1$:

$$\boxed{u_{a,r}(z) = \left(\frac{1-r}{1-\bar{a}rz}\right)^2,\ |z| < 1}.$$

Théoreme 5 *Supposons* $\Psi \in \Delta^2$, *alors la condition du Théorème 4 implique celle du Théorème 2.*

Comme $\Delta^2 \Longrightarrow \Delta^1$, on obtient :

Théoreme 6 *Si* $\Psi \in \Delta^2$, *et* $C_\phi \colon H^\Psi \to H^\Psi$, *on a équivalence entre :*
1) C_ϕ *est borné pour l'ordre et* $C_\phi(H^\Psi) \subseteq HM^\Psi$ *;*
2) C_ϕ *est compact ;*
3) C_ϕ *est faiblement compact ;*
4) on a la condition de la Proposition 1 ;
5) on a la condition du Théorème 2 ;
6) on a la condition du Théorème 4.

Bien sûr, pour $C_\phi \colon H^2 \to H^2$, il n'y a pas équivalence entre 2) et 3) ; et d'après le résultat de Shapiro et Taylor, il n'y a pas équivalence entre 1) et 2).

Dans le cas de $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1$, les conditions sont plus lisibles : 4), 5) et 6) deviennent :

4') $\frac{1}{1-|\phi^*|} \in L^p(\mathbb{T}), \forall p \geq 1$;
5') $\forall q \geq 1\ \exists C_q > 0$: $\quad m(1 - |\phi^*| < \lambda) \leq C_q \lambda^q$;
6') $\forall q \geq 1\ \|\phi^n\|_1 = o\,(n^{-q})$;
et elles sont équivalentes à :
7) $\|\phi^n\|_{\Psi_2} = o\,(1/\sqrt{\log n})$.

Conditions 4) et 5) ne dépendent que du module des valeurs de ϕ au bord ; cela permet de construire des fonctions extérieures. On obtient :

Théoreme 7 *Si $\Psi \in \Delta^2$, il existe des $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tels que $C_\phi\colon H^p \to H^p$ soit compact pour $1 \leq p < \infty$, mais $C_\phi\colon H^\Psi \to H^\Psi$ non compact.*

Idée de la preuve du Théorème 5.

Lemme 8 *Soit* $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *analytique. Alors, pour tout* r *t.q.* $0 < r < 1$*, il existe un* $a \in \mathbb{T}$ *tel que :*

$$m\Big(|1 - \bar{a}r\,\phi| < 3(1-r)\Big) \geq \frac{1-r}{8}\,m(|\phi| > r).$$

Equivaut à, avec $\lambda = 1 - r$:

$$m\Big(|C_\phi(u_{a,r})| > 1/9\Big) \geq (\lambda/8)\,m(1 - |\phi| < \lambda).$$

On contrôle donc $m(1-|\phi| < \lambda)$ par $\|C_\phi(u_{a,r})\|_\Psi$, au coefficient $\lambda/8$ près, grâce à l'inégalité de Markov :

$$m(|f| < t) \leq \frac{1}{\Psi(t/\|f\|_\Psi)}\,.$$

Si la condition du Théorème 4 est vérifiée on obtient, en posant $x = \Psi^{-1}(1/\lambda)$:

$$m(1 - |\phi| < \lambda) \leq 8\frac{\Psi(x)}{\Psi(Ax)}\,;$$

et la condition Δ^2 donne :

$$\frac{\Psi(x)}{\Psi(Ax)} \leq \frac{1}{\Psi(Bx)} = \frac{1}{\chi_B(1/\lambda)}\,.$$

Idée de la preuve du Lemme 8.
On découpe

$$\{z \in \mathbb{D}\,;\ |z| \geq 1 - \lambda\}$$

selon des secteurs d'ouverture λ ; le facteur $1-r$ du Lemme 8 vient de ce qu'il y a $N \approx 1/\lambda$ secteurs.

Mesures de Carleson

Rappel :

Théorème [McCluer (1985)] $C_\phi \colon H^2 \to H^2$ *est compact ssi* m_ϕ *est une* **mesure de Carleson** *évanescente.*

Mesure de Carleson : mesure μ sur $\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{D}}$) telle que :

$$\boxed{\mu\Big(W(\xi, h)\Big) \leq K\, h \quad \forall \xi \in \mathbb{T}, 0 < h < 1.}$$

où $W(\xi, h)$ est la <u>fenêtre de Carleson</u> :

$$\boxed{W(\xi, h) = \{z \in \mathbb{D}\,;\ |z| > 1 - h \text{ et } |\arg(z\bar{\xi})| < h\}}\,.$$

Mesure de Carleson évanescente :

$$\boxed{\mu\Big(W(\xi, h)\Big) = o\,(h), \text{ uniformément pour } \xi \in \mathbb{T}.}$$

On en déduit :

Théoreme 9 *Si* $C_\phi\colon H^\Psi \to H^\Psi$ *est compact, alors* $C_\phi\colon H^2 \to H^2$ *est aussi compact.*

Rappel : L'inverse n'est pas vrai si $\Psi \in \Delta^2$.

Principal résultat :

Théoreme 10 *$C_\phi \colon H^\Psi \to H^\Psi$ est compact ssi, pour tout $A > 0$, on a, quand $h \to 0$:*

$$\boxed{\sup_{|\xi|=1} m_\phi\Big(W(\xi,h)\Big) = o\left(\frac{1}{\Psi[A\Psi^{-1}(1/h)]}\right)}.$$

Pour $\Psi(x) = x^p$: terme de droite $= o\,(h)$.

Conséquences.

Théoreme 11 *Si $\Psi \in \Delta^0$, $C_\phi \colon H^\Psi \to H^\Psi$ est compact ssi il est faiblement compact.*

Théoreme 12 *Il existe une fonction d'Orlicz $\Psi \in \Delta^1$ et un opérateur de composition $C_\phi \colon H^\Psi \to H^\Psi$ qui compact mais qui n'est* pas *borné pour l'ordre et tel que $C_\phi(H^\Psi) \subseteq HM^\Psi$.*

La condition $\Psi \in \Delta^1$ au lieu de $\Psi \in \Delta^2$ ne suffit donc pas pour avoir les équivalences du Théorème 6.

Eléments de preuve. On prend

$$\Psi(x) = \exp\Big(\log(x+1))^2\Big) - 1.$$

Soit :

$$\phi_0(z) = \frac{1+z}{2}$$

et :

$$\phi(z) = \phi_0(z)\,\exp\Big(-\frac{1+z}{1-z}\Big).$$

C_{ϕ_0} pas compact sur H^2, mais :
C_ϕ compact sur H^Ψ (Théorème 10 : la fonction intérieure $M(z) = \exp\Big(-\frac{1+z}{1-z}\Big)$ répartit les "mauvaises" fenêtres de Carleson tout autour du disque, et la condition $\Psi \in \Delta^1$ permet d'avoir la condition "*petit o*" du Théorème 10).
C_ϕ n'est pas borné pour l'ordre sur H^Ψ avec

$C_\phi(H^\Psi) \subseteq HM^\Psi$, car sinon, comme $|\phi^*| = |\phi_0^*|$ sur $\mathbb{T}$, C_{ϕ_0} le serait aussi, par la Proposition 1. Il serait donc compact sur H^Ψ, donc sur H^2 (Théorème 9), ce qui n'est pas. $\square$

Indications pour la preuve du Théorème 10.

1) Mesure arbitraire. μ mesure positive bornée sur $\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{D}}$). On pose :

$$\boxed{\rho_\mu(h) = \sup_{|\xi|=1} \mu\Big(W(\xi, h)\Big)}$$

$$\boxed{K_\mu(h) = \sup_{0<t\leq h} \frac{\rho_\mu(t)}{t}}\,.$$

Théoreme 13

1) Si l'injection canonique $j_\mu \colon H^\Psi \to L^\Psi(\mu)$ est compacte, alors, pour tout $A > 0$:

$$\rho_\mu(h) = o\left(\frac{1}{\chi_A(1/h)}\right).$$

2) Si pour tout $A > 0$, on a :

$$K_\mu(h) = o\left(\frac{1/h}{\chi_A(1/h)}\right),$$

alors j_μ est compacte.

Remarques. 1) $C_\phi \colon H^\Psi \to H^\Psi$ est la même chose que $j_{m_\phi} \colon H^\Psi \to L^\Psi(m_\phi)$.
2) En général la première condition n'est pas suffisante.

On utilise une version affinée du Théorème de Carleson :

Théoreme 14 (Théorème de Carleson) *Pour toute $f \in H^1$, et toute mesure positive μ sur $\overline{\mathbb{D}}$, on a, pour $0 < h \leq 1$ et $t > 0$:*

$$\boxed{\begin{aligned}&\mu(\{z \in \overline{\mathbb{D}}\,;\ |z| \geq 1 - h \text{ et } |f(z)| > t\}) \\ &\qquad\qquad \leq C^{te}\, K_\mu(h)\, m(\{M_f > t\})\end{aligned}}$$

M_f est la fonction maximale de f :

$$M_f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \sup\{|f(z)|\,;\ z \in G_\theta\}$$
$$G_\theta = \{z \in \mathbb{D}\,;\ |\mathrm{e}^{i\theta} - z| < 3(1 - |z|)\}.$$

2) Cas analytique.

On montre que les expression ρ_{m_ϕ} et K_{m_ϕ} sont équivalentes :

Théoreme 15 *Il existe une constante C>0 telle que, pour toute* $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *analytique, on ait :*

$$m_\phi\Big(W(\xi, \epsilon h)\Big) \leq C\, \epsilon\, m_\phi\Big(W(\xi, h)\Big)$$

pour $0 < h \leq 1 - |\phi(0)|$ *et* $0 < \epsilon < 1$.

Idée de la preuve. On peut supposer $\xi = 1$. Comme $|\phi(z)| < 1$, on a $\Re\mathrm{e}\Big(1/(1-\phi(z))\Big) > 0$. Pour $h > 0$ petit, on pose :

$$f(z) = \left(\frac{h}{1-\phi(z)}\right)^{1/3}.$$

On veut contrôler

$$m_\phi\Big(W(1,\epsilon h)\Big) \approx m(\{|f^*| > 1/\sqrt[3]{\epsilon}\})$$

par ϵ fois

$$m_\phi\Big(W(1,h)\Big) \approx m(\{|f^*| > 1\}.$$

Mais :

$$|\arg f(z)| < \frac{\pi}{6}\,.$$

On peut donc contrôler $|f|$ par $|\Re\mathrm{e}(f)|$:

$$\boxed{m(\{|f^*| > \lambda\} \leq C^{te}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3 m(\{Nu > \alpha\})}$$

pour $\lambda \geq 2\alpha$.
Nu est la fonction maximale radiale de $u = \Re\mathrm{e} f$. On a donc :

$$m(\{|f^*| > 1/\sqrt[3]{\epsilon}\}) \leq C^{te}\epsilon\, m(\{Nu > 2\}).$$

Mais on montre que :

$$m(\{Nu > 2\}) \leq C^{te} m(\{u^* > 1\})$$

(on utilise, entre-autres, que si $f = u + iv$, alors $u^2 - v^2$ est harmonique *positive*, et que $|f| \leq (2/\sqrt{3})u$).

Alors :

$$m(\{|f^*| > 1/\sqrt[3]{\epsilon}\}) \leq C^{te} \epsilon \, m(\{u^* > 1\})\,;$$

cela termine la preuve puisque :

$$\{u^* > 1\} \subseteq \{|f^*| > 1\}. \qquad \square$$