Nombres d'approximation des opérateurs de composition: le cas trivial

Daniel Li

Université d'Artois (Lens)

Clermont-Ferrand – Juin 2014

Travail en commun avec

Hervé Queffélec et Luis Rodríguez-Piazza

Introduction

Opérateur de composition

Opérateur de composition

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

Introduction

Opérateur de composition

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

Cadre analytique (une variable)

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$$

$$\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D} \qquad \text{analytique}$$

$$f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \qquad \text{analytique}$$

Opérateur de composition

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

Cadre analytique (une variable)

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$$

$$\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D} \qquad \text{analytique}$$

$$f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \qquad \text{analytique}$$

Cadre hilbertien

Introduction

Espaces usuels des fonctions analytiques hilbertiens :

Introduction

Espaces usuels des fonctions analytiques hilbertiens :

Espace de Hardy H^2 :

$$\|f\|_{H^2}^2 := \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{it})|^2 \,\frac{dt}{2\pi} < +\infty$$

Introduction

Espaces usuels des fonctions analytiques hilbertiens :

Espace de Hardy H^2 :

$$\|f\|_{H^2}^2 := \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{it})|^2 \,\frac{dt}{2\pi} < +\infty$$

Espace de Bergman $\mathfrak{B}^2$:

$$\|f\|_{\mathfrak{B}^2}^2 := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \,\frac{dz}{\pi} < +\infty$$

Espaces usuels des fonctions analytiques hilbertiens :

Espace de Hardy H^2 :

$$\|f\|_{H^2}^2 := \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{it})|^2 \, \frac{dt}{2\pi} < +\infty$$

Espace de Bergman $\mathfrak{B}^2$:

$$\|f\|_{\mathfrak{B}^2}^2 := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, \frac{dz}{\pi} < +\infty$$

Espace de Dirichlet $\mathcal{D}$:

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, \frac{dz}{\pi} < +\infty$$

Introduction

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\|f\|_{\mathfrak{B}^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}$$

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2$$

Introduction

Toute

$$\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D} \quad \text{analytique}$$

opérateur de composition borné

$$C_\varphi \colon H^2 \to H^2 \text{ et } C_\varphi \colon \mathfrak{B}^2 \to \mathfrak{B}^2$$

(*principe de subordination de Littlewood*)

Introduction

Toute

$$\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D} \quad \text{analytique}$$

opérateur de composition borné

$$C_\varphi\colon H^2 \to H^2 \text{ et } C_\varphi\colon \mathfrak{B}^2 \to \mathfrak{B}^2$$

(*principe de subordination de Littlewood*)

Mais

$$C_\varphi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D} \quad \text{borné}$$

ssi φ vérifie des **conditions supplémentaires**

Introduction

Question

Quid de la compacité ?

Question

Quid de la compacité ?

$H = H^2$ ou $\mathfrak{B}^2$ ou $H = \mathcal{D}$ et $C_\varphi \colon H \to H$ continu

Question

Quid de la compacité ?

$H = H^2$ ou $\mathfrak{B}^2$ ou $H = \mathcal{D}$ et $C_\varphi \colon H \to H$ continu

Deux cas

Question

Quid de la compacité ?

$H = H^2$ ou $\mathfrak{B}^2$ ou $H = \mathcal{D}$ et $C_\varphi \colon H \to H$ continu

Deux cas

1) Cas trivial

$$\|\varphi\|_\infty < 1$$
$$\Downarrow$$
$$C_\varphi \text{ compact et même } C_\varphi \in S_p(H) \; \forall p > 0$$

2) Cas non trivial

CNS de compacité :

- Hastings (1975) pour $\mathfrak{B}^2$
- McCluer et Shapiro (1980–1986–1987) pour H^2
- Stegenga (1980) et McCluer et Shapiro (1986) pour $\mathcal{D}$

2) Cas non trivial

CNS de compacité :

- Hastings (1975) pour $\mathfrak{B}^2$
- McCluer et Shapiro (1980–1986–1987) pour H^2
- Stegenga (1980) et McCluer et Shapiro (1986) pour $\mathcal{D}$

en termes de :

- mesures de Carleson
- dérivée angulaire
- fonction de comptage de Nevanlinna

2) Cas non trivial

CNS de compacité :

- Hastings (1975) pour $\mathfrak{B}^2$
- McCluer et Shapiro (1980–1986–1987) pour H^2
- Stegenga (1980) et McCluer et Shapiro (1986) pour $\mathcal{D}$

en termes de :

- mesures de Carleson
- dérivée angulaire
- fonction de comptage de Nevanlinna

et CNS d'appartenance aux classes de Schatten $S_p(H^2)$:

- Luecking (1987) en termes de mesures de Carleson
- Luecking et Zhu (1992) en termes de fonction de Nevanlinna

Nombres d'approximation

H espace de Hilbert ; $T : H \to H$ opérateur

Nombres d'approximation

H espace de Hilbert ; $T : H \to H$ opérateur

$$a_n(T) = \inf_{\operatorname{rg} R < n} \|T - R\|$$

Nombres d'approximation

H espace de Hilbert ; $T : H \to H$ opérateur

$$a_n(T) = \inf_{\mathrm{rg}\, R < n} \|T - R\|$$

Alors

$$a_1(T) = \|T\| \geq a_2(T) \geq \cdots \geq a_n(T) \geq a_{n+1}(T) \geq \cdots$$

Nombres d'approximation

H espace de Hilbert ; $T : H \to H$ opérateur

$$a_n(T) = \inf_{\operatorname{rg} R < n} \|T - R\|$$

Alors

$$a_1(T) = \|T\| \geq a_2(T) \geq \cdots \geq a_n(T) \geq a_{n+1}(T) \geq \cdots$$

$$T \text{ compact} \quad \iff \quad a_n(T) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Nombres d'approximation

H espace de Hilbert ; $T : H \to H$ opérateur

$$a_n(T) = \inf_{\text{rg } R < n} \|T - R\|$$

Alors

$$a_1(T) = \|T\| \geq a_2(T) \geq \cdots \geq a_n(T) \geq a_{n+1}(T) \geq \cdots$$

$$T \text{ compact} \quad \Longleftrightarrow \quad a_n(T) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$T \in S_p(H) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_n [a_n(T)]^p < \infty$$

Nombres d'approximation

Question

Caractériser les nombres d'approximation des opérateurs de composition

Nombres d'approximation

Question

Caractériser les nombres d'approximation des opérateurs de composition

difficile !

Exemples

Quelques exemples

1) a) [LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi(\mathbb{D})$ est contenue dans un polygone P

Exemples

Quelques exemples

1) a) [LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi(\mathbb{D})$ est contenue dans un polygone P

$$a_n(C_\varphi) \leq \alpha\, \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{n}}$$

avec $\alpha, \beta > 0$ ne dépendant que de P

Exemples

Quelques exemples

1) a) [LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi(\mathbb{D})$ est contenue dans un polygone P

$$a_n(C_\varphi) \leq \alpha\, \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{n}}$$

avec $\alpha, \beta > 0$ ne dépendant que de P

b) [Lefèvre + LQR (2013)] ($H = H^2$) Si φ est univalente et $\varphi(\mathbb{D})$ contient un secteur angulaire

Quelques exemples

1) a) [LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi(\mathbb{D})$ est contenue dans un polygone P

$$a_n(C_\varphi) \leq \alpha\, \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{n}}$$

avec $\alpha, \beta > 0$ ne dépendant que de P

b) [Lefèvre + LQR (2013)] ($H = H^2$) Si φ est univalente et $\varphi(\mathbb{D})$ contient un secteur angulaire

$$a_n(C_\varphi) \geq \alpha'\, \mathrm{e}^{-\beta'\sqrt{n}}$$

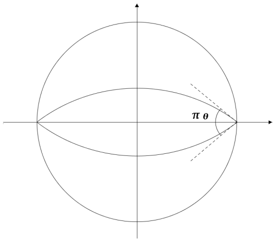
avec $\alpha', \beta' > 0$ ne dépendant que de l'angle du secteur

Exemples

2) [LQR (2013) et Lefèvre + LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi = \varphi_\theta$ est lenticulaire i.e. représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur la lentille ci-dessous

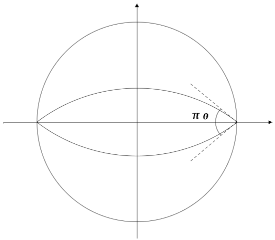
Exemples

2) [LQR (2013) et Lefèvre + LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi = \varphi_\theta$ est lenticulaire i.e. représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur la lentille ci-dessous



Exemples

2) [LQR (2013) et Lefèvre + LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi = \varphi_\theta$ est lenticulaire i.e. représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur la lentille ci-dessous

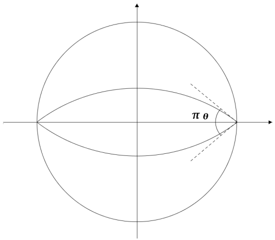


$$\alpha' \,\mathrm{e}^{-\beta'\sqrt{n}} \leq a_n(C_\varphi) \leq \alpha \,\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{n}}$$

où $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$ ne dépendent que de θ

Exemples

2) [LQR (2013) et Lefèvre + LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi = \varphi_\theta$ est lenticulaire i.e. représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur la lentille ci-dessous

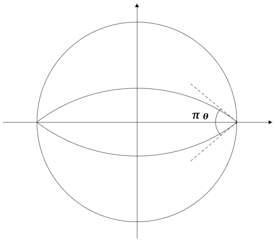


$$\alpha' \, \mathrm{e}^{-\beta' \sqrt{n}} \leq a_n(C_\varphi) \leq \alpha \, \mathrm{e}^{-\beta \sqrt{n}}$$

où $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$ ne dépendent que de θ

Si on étale cette lentille : on prend $\tilde{\varphi}_\theta(z) = \varphi_\theta(z) \, \mathrm{e}^{-\frac{1+z}{1-z}}$, alors [Lefèvre+LQR (2013)]

2) [LQR (2013) et Lefèvre + LQR (2013)] ($H = H^2$) Si $\varphi = \varphi_\theta$ est lenticulaire i.e. représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur la lentille ci-dessous



$$\alpha' \,\mathrm{e}^{-\beta'\sqrt{n}} \leq a_n(C_\varphi) \leq \alpha \,\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{n}}$$

où $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$ ne dépendent que de θ

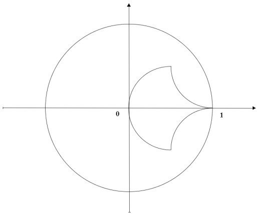
Si on étale cette lentille : on prend $\tilde{\varphi}_\theta(z) = \varphi_\theta(z)\,\mathrm{e}^{-\frac{1+z}{1-z}}$, alors [Lefèvre+LQR (2013)]

$$a_n(C_{\tilde{\varphi}_\theta}) \leq K\,(\log n/n)^{1/2\theta} \qquad n \geq 2$$

Exemples

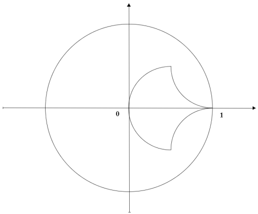
3) Pour la cupside χ, représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur le domaine ci-dessous

3) Pour la cupside χ, représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur le domaine ci-dessous



Exemples

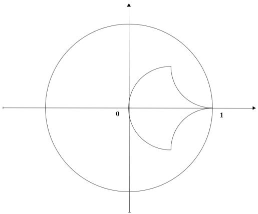
3) Pour la cupside χ, représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur le domaine ci-dessous



$$e^{-b_1 n/\log n} \lesssim a_n(C_\chi) \lesssim e^{-b_2 n/\log n} \qquad \text{pour } H = H^2$$

Exemples

3) Pour la cupside χ, représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur le domaine ci-dessous



$$e^{-b_1 n/\log n} \lesssim a_n(C_\chi) \lesssim e^{-b_2 n/\log n} \qquad \text{pour } H = H^2$$

et

$$e^{-b_1'\sqrt{n}} \lesssim a_n(C_\chi) \lesssim e^{-b_2'\sqrt{n}} \qquad \text{pour } H = \mathcal{D}$$

Remarque : Sur les exemples, les nombres d'approximation sont plus grands pour le Dirichlet que pour H^2

Remarque : Sur les exemples, les nombres d'approximation sont plus grands pour le Dirichlet que pour H^2

Or

Théorème [Lefèvre + LQR (2013)]

Si C_φ est compact sur $\mathcal{D}$, alors C_φ est compact sur H^2, et est même dans toutes les classes de Schatten $S_p(H^2)$, $p > 0$; il est donc aussi compact sur $\mathfrak{B}^2$ et dans toutes les classes de Schatten $S_p(\mathfrak{B}^2)$, $p > 0$.

Remarque : Sur les exemples, les nombres d'approximation sont plus grands pour le Dirichlet que pour H^2

Or

Théorème [Lefèvre + LQR (2013)]

Si C_φ est compact sur $\mathcal{D}$, alors C_φ est compact sur H^2, et est même dans toutes les classes de Schatten $S_p(H^2)$, $p > 0$; il est donc aussi compact sur $\mathfrak{B}^2$ et dans toutes les classes de Schatten $S_p(\mathfrak{B}^2)$, $p > 0$.

D'où la question

Conjecture

A-t-on

$$a_n(C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}) \gtrsim a_n(C_\varphi : H^2 \to H^2) \gtrsim a_n(C_\varphi : \mathfrak{B}^2 \to \mathfrak{B}^2)\,?$$

Minoration universelle

On a la minoration générale suivante, déjà vue, sous une forme un peu “cryptée” par Parfenov (1988) [LQR (2012) et Lefèvre+LQR (2013) pour le cas Dirichlet]

Minoration universelle

On a la minoration générale suivante, déjà vue, sous une forme un peu “cryptée” par Parfenov (1988) [LQR (2012) et Lefèvre+LQR (2013) pour le cas Dirichlet]

Proposition

Si $H = H^2, \mathfrak{B}^2$ ou $H = \mathcal{D}$ et $C_\varphi \colon H \to H$ est borné, il existe $c > 0$ tel que :

$$a_n(C_\varphi) \gtrsim \mathrm{e}^{-cn}$$

On a la minoration générale suivante, déjà vue, sous une forme un peu “cryptée” par Parfenov (1988) [LQR (2012) et Lefèvre+LQR (2013) pour le cas Dirichlet]

Proposition

Si $H = H^2, \mathfrak{B}^2$ ou $H = \mathcal{D}$ et $C_\varphi \colon H \to H$ est borné, il existe $c > 0$ tel que :

$$a_n(C_\varphi) \gtrsim \mathrm{e}^{-cn} = r^n \qquad 0 < r < 1$$

Minoration universelle

On a la minoration générale suivante, déjà vue, sous une forme un peu “cryptée” par Parfenov (1988) [LQR (2012) et Lefèvre+LQR (2013) pour le cas Dirichlet]

Proposition

Si $H = H^2, \mathfrak{B}^2$ ou $H = \mathcal{D}$ et $C_\varphi \colon H \to H$ est borné, il existe $c > 0$ tel que :

$$a_n(C_\varphi) \gtrsim \mathrm{e}^{-cn} = r^n \qquad 0 < r < 1$$

Lorsque $\|\varphi\|_\infty < 1$, on voit facilement que

Minoration universelle

On a la minoration générale suivante, déjà vue, sous une forme un peu "cryptée" par Parfenov (1988) [LQR (2012) et Lefèvre+LQR (2013) pour le cas Dirichlet]

Proposition

Si $H = H^2, \mathfrak{B}^2$ ou $H = \mathcal{D}$ et $C_\varphi \colon H \to H$ est borné, il existe $c > 0$ tel que :

$$a_n(C_\varphi) \gtrsim \mathrm{e}^{-cn} = r^n \qquad 0 < r < 1$$

Lorsque $\|\varphi\|_\infty < 1$, on voit facilement que

$$a_n(C_\varphi) \lesssim \|\varphi\|_\infty^n$$

Minoration universelle

En fait (on suppose $\varphi(0) = 0$ pour avoir un énoncé plus simple) :

Minoration universelle

En fait (on suppose $\varphi(0) = 0$ pour avoir un énoncé plus simple) :

Théorème

Soit $H = H^2$, $\mathfrak{B}^2$ ou $\mathcal{D}$.
Pour tout $0 < r < 1$, il existe $0 < s(r) < 1$ avec $s(r) \xrightarrow[r\to 1]{} 1$ tel que :

$$\|\varphi\|_\infty > r \quad \Longrightarrow \quad a_n(C_\varphi) \gtrsim \frac{s^n}{\sqrt{n}}$$

Minoration universelle

En fait (on suppose $\varphi(0) = 0$ pour avoir un énoncé plus simple) :

Théorème

Soit $H = H^2$, $\mathfrak{B}^2$ ou $\mathcal{D}$.
Pour tout $0 < r < 1$, il existe $0 < s(r) < 1$ avec $s(r) \xrightarrow[r\to 1]{} 1$ tel que :

$$\|\varphi\|_\infty > r \quad \Longrightarrow \quad a_n(C_\varphi) \gtrsim \frac{s^n}{\sqrt{n}}$$

La preuve utilise le Théorème de factorisation de Pietsch pour construire une mesure μ portée par un compact $K \subseteq \varphi(\mathbb{D})$ telle que pour l'opérateur de restriction $R_\mu \colon H \to L^2(\mu)$, on ait $a_n(C_\varphi) \gtrsim a_n(R_\mu)$.

Conséquence

Si l'on pose

$$\beta^+(C_\varphi) = \limsup_{n\to\infty}[a_n(C_\varphi)]^{1/n}$$
$$\beta^-(C_\varphi) = \liminf_{n\to\infty}[a_n(C_\varphi)]^{1/n}$$

et $\beta(C_\varphi)$ pour la limite, lorsqu'elle existe, on a :

Conséquence

Si l'on pose

$$\beta^+(C_\varphi) = \limsup_{n\to\infty}[a_n(C_\varphi)]^{1/n}$$
$$\beta^-(C_\varphi) = \liminf_{n\to\infty}[a_n(C_\varphi)]^{1/n}$$

et $\beta(C_\varphi)$ pour la limite, lorsqu'elle existe, on a :

1) $\|\varphi\|_\infty < 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta^+(C_\varphi) < 1$

Conséquence

Si l'on pose

$$\beta^+(C_\varphi) = \limsup_{n\to\infty}[a_n(C_\varphi)]^{1/n}$$
$$\beta^-(C_\varphi) = \liminf_{n\to\infty}[a_n(C_\varphi)]^{1/n}$$

et $\beta(C_\varphi)$ pour la limite, lorsqu'elle existe, on a :

1) $\|\varphi\|_\infty < 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta^+(C_\varphi) < 1$

2) $\|\varphi\|_\infty = 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta(C_\varphi) = 1$

Conséquence

Si l'on pose

$$\beta^+(C_\varphi) = \limsup_{n\to\infty}[a_n(C_\varphi)]^{1/n}$$
$$\beta^-(C_\varphi) = \liminf_{n\to\infty}[a_n(C_\varphi)]^{1/n}$$

et $\beta(C_\varphi)$ pour la limite, lorsqu'elle existe, on a :

1) $\|\varphi\|_\infty < 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta^+(C_\varphi) < 1$

2) $\|\varphi\|_\infty = 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta(C_\varphi) = 1$

Ainsi, pour $\beta(C_\varphi)$, le cas intéressant est celui où

$$\|\varphi\|_\infty < 1 \ !$$

Le cas trivial (pas tant que ça !)

Cadre général : espaces de Hilbert analytiques pondérés (Kellay-Lefèvre)

Le cas trivial (pas tant que ça !)

Cadre général : espaces de Hilbert analytiques pondérés (Kellay-Lefèvre)

Soit

$\omega \colon \mathbb{D} \to]0, +\infty[$ continue, intégrable et radiale : $\omega(z) = \omega(|z|)$

Le cas trivial (pas tant que ça !)

Cadre général : espaces de Hilbert analytiques pondérés (Kellay-Lefèvre)
Soit

$\omega\colon \mathbb{D} \to]0, +\infty[$ continue, intégrable et radiale : $\omega(z) = \omega(|z|)$

H_ω espace des $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytiques telles que

$$\|f\|^2 := \|f\|_\omega^2 := |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, \omega(z)\, dz/\pi < +\infty$$

Le cas trivial (pas tant que ça !)

Cadre général : espaces de Hilbert analytiques pondérés (Kellay-Lefèvre)

Soit

$\omega \colon \mathbb{D} \to]0, +\infty[$ continue, intégrable et radiale : $\omega(z) = \omega(|z|)$

H_ω espace des $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytiques telles que

$$\|f\|^2 := \|f\|_\omega^2 := |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, \omega(z) \, dz/\pi < +\infty$$

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, on a :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \, w_n$$

avec

$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad w_n = 2n^2 \int_0^1 r^{2n-1} \omega(r) \, dr \, , \qquad n \geq 1$$

Le cas trivial (pas tant que ça !)

Pour $\omega(r) = (1 - r^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, on a $w_n \approx n^{1-\alpha}$ et donc

Le cas trivial (pas tant que ça !)

Pour $\omega(r) = (1 - r^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, on a $w_n \approx n^{1-\alpha}$ et donc

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}^2 & \longleftrightarrow & \alpha = 2 \\ H^2 & \longleftrightarrow & \alpha = 1 \\ \mathcal{D} & \longleftrightarrow & \alpha = 0 \end{array}$$

Le cas trivial (pas tant que ça !)

Théorème

Soit H un espace de Hilbert analytique pondéré, et $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tel que $C_\varphi\colon H \to H$ soit borné. On suppose que $\|\varphi\|_\infty < 1$ i.e. $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \subseteq \mathbb{D}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} [a_n(C_\varphi)]^{1/n} =: \beta(C_\varphi)$$

existe, et cette valeur est

$$\beta(C_\varphi) = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,[\overline{\varphi(\mathbb{D})}]},$$

où $\mathrm{Cap}\,[\overline{\varphi(\mathbb{D})}]$ est la capacité de Green de $\overline{\varphi(\mathbb{D})}$.

Capacité de Green

La fonction de Green $g : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to]0, \infty[$ du disque unité $\mathbb{D}$:

$$g(z, w) = \log \left| \frac{1 - \overline{w}z}{z - w} \right|$$

La fonction de Green $g : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to]0, \infty[$ du disque unité $\mathbb{D}$:

$$g(z, w) = \log \left| \frac{1 - \overline{w}z}{z - w} \right|$$

Si μ mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{D}$ à support compact contenu dans $\mathbb{D}$, son potentiel de Green est :

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w)\, d\mu(w)$$

Capacité de Green

La fonction de Green $g : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to]0, \infty[$ du disque unité $\mathbb{D}$:

$$g(z, w) = \log \left| \frac{1 - \overline{w}z}{z - w} \right|$$

Si μ mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{D}$ à support compact contenu dans $\mathbb{D}$, son potentiel de Green est :

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w)\, d\mu(w)$$

et son intégrale d'énergie est :

$$I(\mu) = \iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} g(z, w)\, d\mu(z)\, d\mu(w)$$

Capacité de Green

La fonction de Green $g : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to]0, \infty[$ du disque unité $\mathbb{D}$:

$$g(z, w) = \log \left| \frac{1 - \overline{w}z}{z - w} \right|$$

Si μ mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{D}$ à support compact contenu dans $\mathbb{D}$, son potentiel de Green est :

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w)\, d\mu(w)$$

et son intégrale d'énergie est :

$$I(\mu) = \iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} g(z, w)\, d\mu(z)\, d\mu(w) = \int_{\mathbb{D}} G_\mu(z)\, d\mu(z)$$

Capacité de Green

Pour $E \subseteq \mathbb{D}$:

$$V(E) = \inf_\mu I(\mu)$$

borne inférieure sur toutes les mesures de probabilité μ portées par un compact de E.

Capacité de Green

Pour $E \subseteq \mathbb{D}$:

$$V(E) = \inf_\mu I(\mu)$$

borne inférieure sur toutes les mesures de probabilité μ portées par un compact de E.
La capacité de Green (en fait la capacité intérieure) de E dans $\mathbb{D}$ est :

$$\mathrm{Cap}\,(E) = 1/V(E)$$

Capacité de Green

Pour $E \subseteq \mathbb{D}$:

$$V(E) = \inf_\mu I(\mu)$$

borne inférieure sur toutes les mesures de probabilité μ portées par un compact de E.

La capacité de Green (en fait la capacité intérieure) de E dans $\mathbb{D}$ est :

$$\mathrm{Cap}\,(E) = 1/V(E)$$

Propriétés

- $E \mapsto \mathrm{Cap}\,(E)$ croissante
- $\mathrm{Cap}\,(E) = \sup_{K \subseteq E, K \text{ compact}} \mathrm{Cap}\,(K)$
- Si $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Cap}\,(E) > 0$ (i.e. $V(E) < +\infty$)

Capacité de Green

Pour $E \subseteq \mathbb{D}$:

$$V(E) = \inf_\mu I(\mu)$$

borne inférieure sur toutes les mesures de probabilité μ portées par un compact de E.
La capacité de Green (en fait la capacité intérieure) de E dans $\mathbb{D}$ est :

$$\mathrm{Cap}\,(E) = 1/V(E)$$

Propriétés
- $E \mapsto \mathrm{Cap}\,(E)$ croissante
- $\mathrm{Cap}\,(E) = \sup_{K \subseteq E, K \text{ compact}} \mathrm{Cap}\,(K)$
- Si $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Cap}\,(E) > 0$ (i.e. $V(E) < +\infty$) car $V(E) \leq I(\lambda) < +\infty$, λ mesure de Lebesgue normalisée sur un disque ouvert $\Delta \subseteq E$

Capacité de Green

Si E borélien et $\mathrm{Cap}\,(E) = 0$, E “très petit” :

Capacité de Green

Si E borélien et $\mathrm{Cap}\,(E) = 0$, E "très petit" :

On a $\mu(E) = 0$ pour toute μ telle que $I_\mu < \infty$

Capacité de Green

Si E borélien et $\mathrm{Cap}\,(E) = 0$, E “très petit” :

On a $\mu(E) = 0$ pour toute μ telle que $I_\mu < \infty$

Le Théorème de Frostman dit que :

$$\mathcal{H}^s(E) = 0 \text{ pour tout } s,\ 0 < s \leq 1$$

où $\mathcal{H}^s(E)$ est la mesure de Hausdorff s-dimensionnelle

Capacité de Green

Capacité de Green : assez difficile à calculer

Capacité de Green

Capacité de Green : assez difficile à calculer

Exemples

Capacité de Green

Capacité de Green : assez difficile à calculer

Exemples

1) Si $K = \overline{D(0,r)}$, alors $\mathrm{Cap}\,(K) = \dfrac{1}{\log 1/r}$

Capacité de Green

Capacité de Green : assez difficile à calculer

Exemples

1) Si $K = \overline{D(0,r)}$, alors $\mathrm{Cap}\,(K) = \dfrac{1}{\log 1/r}$

2) Si $K = [0,h]$, alors $\mathrm{Cap}\,(K) = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{I'}{I}$

Capacité de Green

Capacité de Green : assez difficile à calculer

Exemples

1) Si $K = \overline{D(0,r)}$, alors $\mathrm{Cap}\,(K) = \dfrac{1}{\log 1/r}$

2) Si $K = [0,h]$, alors $\mathrm{Cap}\,(K) = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{I'}{I}$
où I et I' sont les intégrales elliptiques

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}}\,dt$$

$$I' = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2\,t^2)}}\,dt$$

avec $k = \dfrac{1-h}{1+h}$ and ${k'}^2 = 1 - k^2$

Capacité de Green : assez difficile à calculer

Exemples

1) Si $K = \overline{D(0,r)}$, alors $\mathrm{Cap}\,(K) = \dfrac{1}{\log 1/r}$

2) Si $K = [0,h]$, alors $\mathrm{Cap}\,(K) = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{I'}{I}$
où I et I' sont les intégrales elliptiques

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}}\,dt$$
$$I' = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2\,t^2)}}\,dt$$

avec $k = \dfrac{1-h}{1+h}$ and $k'^2 = 1 - k^2$
On a $\mathrm{Cap}\,([0,h]) \underset{h\to 1}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{Cap}\,[D(0,r)] \underset{r\to 1}{\longrightarrow} +\infty$

Widom

Preuve du théorème : repose sur des résultats de Widom (1972), sur l'approximation uniforme des fonctions analytiques bornées par des fractions rationnelles (forme précisée du théorème de Runge).

Widom

Preuve du théorème : repose sur des résultats de Widom (1972), sur l'approximation uniforme des fonctions analytiques bornées par des fractions rationnelles (forme précisée du théorème de Runge).

Plus présisément, si $K \subseteq \mathbb{D}$ est compact, il montre que, pour des "nombres d'approximation" d_n sur l'espace $\mathcal{H}\mathrm{ol}\,(\mathbb{D})$, considéré comme un sous-espace de $\mathcal{C}(K)$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} d_n^{1/n} = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,(K)}$$

Widom

Utilise le fait que tout compact $K \subseteq \mathbb{D}$ possède une mesure d'équilibre μ_0, i.e. une probabilité μ_0 telle que $\mu_0(K) = 1$ et $V(K) = I(\mu_0)$ (si $\mathrm{Cap}\,(K) > 0$, elle est unique). Elle vérifie :

$$G_{\mu_0}(z) \leq 1/\mathrm{Cap}\,(K) \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

et

$$G_{\mu_0}(z) = 1/\mathrm{Cap}\,(K) \qquad \forall z \in \overset{\circ}{K}$$

Widom

Utilise le fait que tout compact $K \subseteq \mathbb{D}$ possède une mesure d'équilibre μ_0, i.e. une probabilité μ_0 telle que $\mu_0(K) = 1$ et $V(K) = I(\mu_0)$ (si $\mathrm{Cap}\,(K) > 0$, elle est unique). Elle vérifie :

$$G_{\mu_0}(z) \leq 1/\mathrm{Cap}\,(K) \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

et

$$G_{\mu_0}(z) = 1/\mathrm{Cap}\,(K) \qquad \forall z \in \overset{\circ}{K}$$

Ensuite, la construction de Widom est plutôt compliquée (surtout la minoration)

“Preuve” du théorème

1) Majoration

1) Majoration

On prend $K = \overline{\varphi(\mathbb{D})}$ et on utilise le fait que

$$\|f \circ \varphi - g \circ \varphi\| \approx \int_{\mathbb{D}} |f'[\varphi(z)] - g'[\varphi(z)]|^2 |\varphi'(z)|^2 \omega(z)\, dz$$

est contrôlée supérieurement par $\|f' - g'\|_{\mathcal{C}(K)}$.
Le Théorème de Widom se transfère et on obtient

$$\beta^+(C_\varphi) \leq \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,[\overline{\varphi(\mathbb{D})}]}$$

“Preuve” du théorème

2) Minoration

"Preuve" du théorème

2) Minoration

On prend des $r_j \nearrow 1$
On considère les compacts $K_j = \overline{\varphi(r_j\mathbb{D})}$.

2) Minoration

On prend des $r_j \nearrow 1$
On considère les compacts $K_j = \overline{\varphi(r_j\mathbb{D})}$.
Si $\psi_j(z) = r_j z$, on a

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}(K_j)} = \|f \circ \varphi \circ \psi_j - g \circ \varphi \circ \psi_j\|_\infty$$

2) Minoration

On prend des $r_j \nearrow 1$

On considère les compacts $K_j = \overline{\varphi(r_j \mathbb{D})}$.

Si $\psi_j(z) = r_j z$, on a

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}(K_j)} = \|f \circ \varphi \circ \psi_j - g \circ \varphi \circ \psi_j\|_\infty$$

Les évaluations $f \in H \mapsto f(z)$ étant uniformément bornées sur les compacts K_j, on obtient :

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}(K_j)} \leq L_j \, \|f \circ \varphi - g \circ \varphi\|$$

i.e. un contrôle de la norme de $\mathcal{C}(K_j)$ par la norme de H

"Preuve" du théorème

Permet d'obtenir (petite difficulté : H ne contient pas forcément H^∞ ; c'est le cas de $\mathcal{D}$; il faut faire une double approximation), via le Théorème de Widom :

$$\beta^-(C_\varphi) \geq \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,(K_j)}$$

“Preuve” du théorème

Permet d'obtenir (petite difficulté : H ne contient pas forcément H^∞ ; c'est le cas de $\mathcal{D}$; il faut faire une double approximation), via le Théorème de Widom :

$$\beta^-(C_\varphi) \geq \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,(K_j)}$$

Comme $\lim\!\uparrow K_j = \varphi(\mathbb{D})$, on a :

$$\lim\!\uparrow \mathrm{Cap}\,(K_j) = \mathrm{Cap}\,[\varphi(\mathbb{D})],$$

d'où :

$$\beta^-(C_\varphi) \geq \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,[\varphi(\mathbb{D})]}$$

“Preuve” du théorème

Ce n’est pas tout à fait ce qu’on veut !

“Preuve” du théorème

Ce n’est pas tout à fait ce qu’on veut !

Mais

"Preuve" du théorème

Ce n'est pas tout à fait ce qu'on veut !

Mais

Merci Ancona !

"Preuve" du théorème

Ce n'est pas tout à fait ce qu'on veut !

Mais

Merci Ancona !

Théorème

Si $E \subseteq \mathbb{D}$ est relativement compact dans $\mathbb{D}$ et connexe, alors

$$\mathrm{Cap}\,(E) = \mathrm{Cap}\,(\overline{E})$$

"Preuve" du théorème

On a donc

$$\mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,[\overline{\varphi(\mathbb{D})}]} = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,[\varphi(\mathbb{D})]} \leq \beta^-(C_\varphi) \leq \beta^+(C_\varphi) \leq \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,[\overline{\varphi(\mathbb{D})}]}$$

D'où

$$\beta(C_\varphi) = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{Cap}\,[\overline{\varphi(\mathbb{D})}]}$$

Pour terminer

Théorème (communiqué par E. Saksman)

Il existe $c > 0$ tel que, si $K \subseteq \mathbb{D}$ est compact et connexe, et $0 < r < 1$

$$\mathrm{diam}_\rho(K) > r \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Cap}\,(K) \geq c \log 1/(1-r)$$

$\mathrm{diam}_\rho(K)$ est le diamètre pseudo-hyperbolique de K

Conséquence

Théorème

On a :

$$\|\varphi\|_\infty = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta(C_\varphi) = 1$$

THAT'S ALL FOLKS !